RRC I ROK FIZYKI I ASTRONOMII
LISTA 2

1. Wyznacz naturalne dziedziny następujących funkcji:

$$f_1(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\log(1-x)}$$

$$f_4(x) = \log\frac{x+1}{x-2} + \sqrt{9-x^2}, \quad f_5(x) = \sqrt{1-2^{|x|}}, \quad f_6(x) = \frac{1}{\log|x|}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}, \quad f_8(x) = \sqrt{\log\cos(2\pi x)}, \quad f_9(x) = \sqrt{\log(1-x^2)}$$

2. Udowodnij, że dane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:
a) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}+1}$, $x \in [0, \infty)$,
b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
c) $f(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbf{R}$.
3. Wykaż, że obrazem funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ jest zbiór $\mathbf{R}$.
4. Wyznacz wszystkie funkcje takie, że $R_f = \mathbf{R}$ oraz $f \circ f = f$.
5. Wykaż, że każdą funkcję okresloną na przedziale $(-a, a)$ można przedstawić jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.
6. Wykaż, że suma dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją nieparzystą, a ich iloczyn funkcją parzystą.
7. Wyznacz złożenia funkcji $f \circ g$, $g \circ f$ oraz znajdź ich dziedziny:
a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 2$,
b) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = x^2$.
8. Niech $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$. Wyznacz $f \circ f$ oraz $f \circ f \circ f$.
9. Wyznacz funkcję odwrotną do danej:
a) $f(x) = 4x - 3$, $x \in \mathbf{R}$,
b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x \neq -2$,
c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
10. Załóżmy, że funkcja f jest różnowartościowa. Wykaż, że f^{-1} jest też różnowartościowa i $(f^{-1})^{-1} = f$.
11. Wykaż, że następujące funkcje są ograniczone:
a) $f(x) = \sin^2 x + 3\cos x$, $x \in \mathbf{R}$,
b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$,
c) $f(x) = 2^{\sin x} + 2\cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

12. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ jest rosnąca w przedziale $[-1,\, 1]$.
13. Pokaż, że funkcja $f : (0,\, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, jest malejąca na przedziale $(0,\, 1]$ i rosnąca na przedziale $[1,\, \infty)$.
14. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ posiada funkcję odwrotną. Udowodnij, że jeżeli f jest rosnąca, to f^{-1} jest też rosnąca.
15.* Podaj przykład funkcji różnowartościowej $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$, dla której $R_f = (0, 1)$.

Robert Olkiewicz